

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 1.1 Problemas de valor inicial

Instrucciones. Resolver los siguientes problemas incluyendo todo el procedimiento.

1. Encontrar una solución al PVI para $y = \frac{1}{1 + ce^{-x}}$, para la ecuación diferencial $y' = y - y^2$ con las condiciones iniciales a) $y(0) = -1/3$ y b) $y(-1) = 2$.
2. Encontrar una solución al PVI para $y = \frac{1}{x^2 + c}$, para la ecuación diferencial $y' + 2xy^2 = 0$ con las condiciones iniciales a) $y(-2) = 1/2$ y b) $y(1/2) = -4$.
3. Encontrar una solución al PVI para $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, para la ecuación diferencial $x'' + x = 0$ con las condiciones iniciales a) $x(0) = -1, x'(0) = 8$ y b) $x(\pi/2) = 0, x'(\pi/2) = 1$.
4. Encontrar una solución al PVI para $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, para la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ con las condiciones iniciales $y(1) = 0, y'(1) = e$.
5. Verificar que $3x^2 - y^2 = c$ es solución de $y \frac{dy}{dx} = 3x$.

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales

Taller 1.2 Las ecuaciones diferenciales como modelos matemáticos

1. Con base en las mismas hipótesis de la dinámica población, determinar una ecuación diferencial para la población $P(t)$ de un país cuando se les permite a las personas inmigrar a un país con una razón constante.
2. Suponer que un alumno es portador del virus de la gripe y asiste a su escuela de 1000 estudiantes. Determinar una ecuación diferencial para el número de personas $x(t)$ que contraerán la gripe si la razón con la que la enfermedad se propaga es proporcional al número de interacciones entre el número de estudiantes que tiene gripe y los que no.
3. Un circuito en serie tiene un resistor y un inductor. Determinar una ecuación diferencial para la corriente $i(t)$.

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 1.3 Introducción a la Transformada de Laplace

1. Utilizando la definición de la transformada de Laplace demuestre que

$$\mathcal{L}\{e^t \cos t\} = \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}$$

2. Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones

a) $F(s) = \frac{s-2}{s^2 + 5s + 6}$

b) $F(s) = \frac{2s+6}{8s^2 - 2s - 3}$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 2.1 Ecuaciones homogéneas

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la técnica de ecuaciones homogéneas.

1. $(x - y)dx + xdy = 0$

2. $x dx + (y - 2x)dy = 0$

3. $(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$

5. $-y dx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$

6. $2x^2 y dx = (3x^3 + y^3)dy$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 2.2 Ecuaciones exactas

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la técnica de ecuaciones exactas.

1. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+9x^2}\right) \frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

2. $x \frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

3. $(4t^3y - 15t^2 - y)dt + (t^4 + 3y^2 - t)dy = 0$

4. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)dx + (2y \sin x - x^3 + \ln y)dy = 0$

5. $\left(\frac{1}{1+y^2} + \cos x - 2xy\right) \frac{dx}{dy} = y(y + \sin x)$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 2.3 Ecuaciones lineales

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la técnica de ecuaciones lineales.

1. $x \frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$

2. $(1 + e^x) \frac{dy}{dx} + e^x y = 0$

3. $\cos x \frac{dy}{dx} + y \sin x = 1$

4. $(x + 1) \frac{dy}{dx} + (x + 2)y = 2xe^{-x}$

5. $y \frac{dx}{dy} - x = 2y^2$ para $y(1) = 5$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 2.4 Transformada de Laplace

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace.

1. $\frac{dy}{dt} + 4y = e^{-4t}, y(0) = 2$

2. $y' - y = 1 + te^t, y(0) = 0$

3. $\frac{dy}{dt} - y = e^{3t}, y(0) = 2$

4. $\frac{dy}{dt} + y = 2 \operatorname{sen} t, y(0) = -1$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 2.5 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

Instrucciones. Resolver cada uno de los problemas propuestos utilizando alguna técnica para solución de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. A un circuito R-C en serie se le aplica una tensión de 100V, la resistencia es igual a 200Ω y la capacitancia es de 10^{-4}F . Calcular la carga $q(t)$ en el capacitor si $q(0) = 0$ y obtener $i(t)$.
2. En un cultivo de bacterias la rapidez de crecimiento en el número de bacterias es proporcional al número presente. Si el número de triplica en 5 horas, ¿cuántas habrá en 10 horas? ¿cuándo el número será 10 veces en número inicial?
3. Un cuerpo cuya temperatura es de 80°F se coloca en el tiempo $t = 0$ en un medio en el que la temperatura se conserva a 50°F . Después de 5 minutos, el cuerpo se ha enfriado hasta una temperatura de 70°F . ¿Cuál será la temperatura del cuerpo después de 10 minutos? ¿Cuándo la temperatura del cuerpo será de 60°F ?

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

Ecuaciones Diferenciales

Taller 3.1 Solución de ecuaciones diferenciales por reducción de orden

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por reducción de orden.

1. $y'' - y = 0$; $y_1 = \cosh x$

2. $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$; $y_1 = x^4$

3. $xy'' + y' = 0$; $y_1 = \ln x$

4. $(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$; $y_1 = x + 1$

5. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1 = x \operatorname{sen}(\ln x)$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 3.2 ED lineales homogéneas con coeficientes constantes

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes.

1. $y'' - 4y' + 5y = 0$

2. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$

3. $16\frac{d^4y}{dx^4} + 24\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$

4. $\frac{d^5u}{dr^5} + 5\frac{d^4u}{dr^4} - 2\frac{d^3u}{dr^3} - 10\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{du}{dr} + 5u = 0$

5. $y'' - 4y' - 5y = 0; \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 2$

6. $y''' + 12y'' + 36y' = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 3.3 ED lineales no homogéneas con coeficientes constantes

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes.

1. $y'' + 2y' + y = \sin x + 3 \cos 2x$

2. $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$

3. $y'' + y = -2; y(\pi/8) = 0, y'(\pi/8) = 2$

4. $5y'' + y' = -6x; y(0) = 0, y'(0) = -10$

5. $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}; y(0) = -3, y'(0) = 1$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 3.4 ED lineales no homogéneas por variación de parámetros

Instrucciones. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por variación de parámetros.

1. $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen} e^x$

2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$

3. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

4. $3y'' - 6y' + 30y = e^x \tan 3x$

5. $4y'' - y = xe^{x/2}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 3.5 Ecuaciones diferenciales con coeficientes variables

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la ecuación de Cauchy-Euler.

a) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

b) $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

c) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

d) $x^3y''' + xy' - y = 0$

e) $x^4y^{IV} + 6x^3y''' + 9x^2y'' + 3xy' + y = 0$

f) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 5, \quad y'(1) = 3$

Taller 3.6 Transformada de Laplace para ecuaciones diferenciales de orden superior

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior utilizando la Transformada de Laplace.

a) $y'' - 4y' + 4y = t^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

b) $y'' - 6y' + 13y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -3$

c) $2y'' + 20y' + 51y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$

d) $y'' - y' = e^t \cos t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

e) $y'' - 2y' + 5y = 1 + t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño

Ecuaciones Diferenciales

Taller 3.7 Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior

Instrucciones. Resolver los siguientes problemas utilizando ecuaciones diferenciales de orden superior.

1. Al fijar un contrapeso de 24 libras al extremo de un resorte, lo estira 4 pulgadas. Deducir la ecuación de movimiento cuando el contrapeso se suelta y parte del reposo desde un punto que está 3 pulgadas arriba de la posición de equilibrio.
2. Un contrapeso de 8 libras, fijo a un resorte, tiene movimiento armónico simple. Deducir la ecuación de movimiento si la constante del resorte es de 1 libra/pie y el contrapeso parte de 6 pulgadas abajo del punto de equilibrio, con una velocidad de $3/2$ pies/seg hacia abajo.
3. Una fuerza de 2 libras estira 1 pie un resorte. A ese resorte se le une un contrapeso de 3.2 libras y el sistema se sumerge en un medio que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 0.4 la velocidad instantánea. Deducir la ecuación de movimiento de la posición de equilibrio.
4. Cuando una masa de 1 *slug* se cuelga de un resorte, lo estira 2 pies y llega al reposo en su posición de equilibrio. A partir de $t = 0$, se aplica una fuerza externa al sistema $f(t) = 8 \sin 4t$. Formular la ecuación de movimiento si el medio presenta una fuerza amortiguada numéricamente igual a 8 veces la velocidad instantánea.
5. Determinar la carga en el capacitor y la corriente en un circuito en serie LRC. Calcular la marga máxima en el capacitor, con $L = 5/3H$, $R = 10\Omega$, $C = 1/30F$, $E(t) = 300V$, $q(0) = 0$, $i(0) = 0$.

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 4.1 La transformada de Laplace.

1. Hallar la transformada inversa de Laplace para cada una de las siguientes funciones:

$$a) F(s) = \frac{2}{s^2 + 9}$$

$$b) F(s) = \frac{5}{(s - 2)^4}$$

$$c) F(s) = \frac{s + 2}{s^2 + 4s + 7}$$

$$d) F(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 3s}$$

$$e) F(s) = \frac{s + 3}{(s^2 + 4)^2}$$

$$f) F(s) = \frac{5}{(s + 2)^5}$$

$$g) F(s) = \frac{2s + 7}{(s + 3)^4}$$

$$h) F(s) = \frac{s - 2}{s^2 + 5s + 6}$$

$$i) F(s) = \frac{7s + 12}{s^2 + 9}$$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales

Taller 4.2 Transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales.

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace.

a) $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 12y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1.$

b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4.$

c) $\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y = te^{-2t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

d) $\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 15y = 9te^{2t}, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 10.$

e) $\frac{d^3y}{dt^3} - 5\frac{d^2y}{dt^2} + 7\frac{dy}{dt} - 3y = 20 \operatorname{sen} t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2.$

f) $\frac{d^3y}{dt^3} - 6\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} - 6y = 36te^{4t}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -6.$

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño
Ecuaciones Diferenciales
Taller 4.3 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales por la transformada de Laplace.

$$a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + x + y = 0, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = 0, \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{array} \right.$$

$$b) \left\{ \begin{array}{l} 2\frac{dx}{dt} + 4\frac{dy}{dt} + x - y = 3e^t, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + 2y = e^t, \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$c) \left\{ \begin{array}{l} 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - x - y = e^{-t}, \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = e^t, \\ x(0) = 2, y(0) = 1. \end{array} \right.$$

$$d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} = t^2, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2} = 4t, \\ x(0) = 8, x'(0) = 0, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0. \end{array} \right.$$